ビオ・サバールの法則で
直線電流の作る磁場を計算する

村田憲治@岐阜高校

僕が開設しているブログ（http://physics.cocolog-nifty.com/）で，標題のような記事を書いたら，親切なかたが丁寧なコメントをつけてくださって，とても勉強になりました。
「学校裏サイト」の問題など，インターネットに関しては暗い話題が多い昨今ですが，こういうイイこともあるんですね。そのまま転載します。

■ 2007 年 7 月 8 日　村田の問題提起

高校物理ではビオ・サバールの法則を教えないので，

「直線電流の作る磁場は $H=\dfrac{i}{2\pi r}$ で，円形電流の作る磁場は $H=\dfrac{i}{2r}$ だ」

とかって天下るんだけど，ちょっと気持ち悪いですよね。で，初学者にも分かるように計算できないかと思ってやってみました。

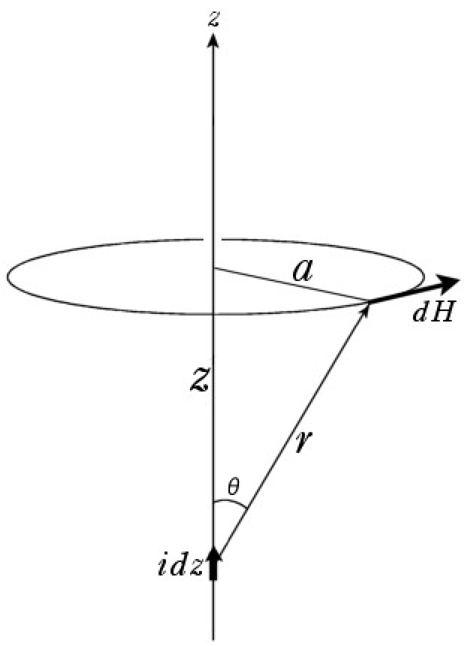
高校ではベクトルの外積を教えないので,「電流素片 idz がつくる磁場の向きは右ねじの法則で分かるだろ？」

ってことで，ビオサバールの法則も大きさだけの式にしてみました。

ビオ・サバールの法則　$dH=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{i\,dz\sin\theta}{r^2}$

無限に長い直線電流が点Ｐに作る磁場は，上の式を

$H=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{i\sin\theta}{r^2}dz$　と積分してやればよい。



図より，$r=\dfrac{a}{\sin\theta}$ なので，上式は

$H=\dfrac{i}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin^3\theta}{a^2}dz$ となって，

さらに $z=\dfrac{a}{\tan\theta}$ なので，これを $z=\dfrac{a}{x}$ としてやると，

$\dfrac{dz}{d\theta}=\dfrac{dz}{dx}\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{a}{x^2}\dfrac{1}{\cos^2}=-\dfrac{a}{\sin^2\theta}$ となるから

さっきの積分は

$H=-\dfrac{i}{4\pi a}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=-\dfrac{i}{4\pi a}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}=-\dfrac{i}{2\pi r}$

あれ？ マイナスがついちゃったな。

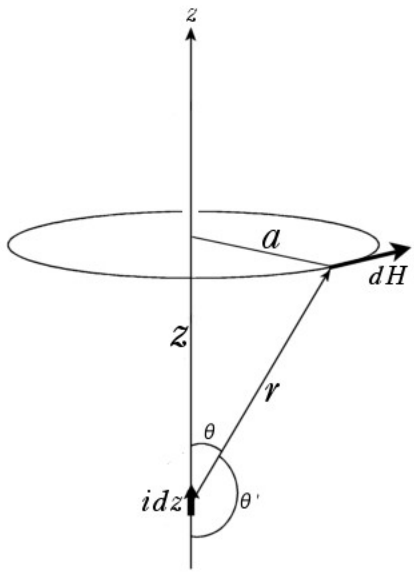
$\sin\theta = \sin\theta'$ だから，こっちで積分してやるか。

$$H = -\frac{i}{4\pi a}\int_{\pi}^{0} \sin\theta' \, d\theta = -\frac{i}{4\pi a}\left[-\cos\theta'\right]_{\pi}^{0} = \frac{i}{2\pi r}$$

なんとか答えは出てきたけど，ちょっとインチキくさいかも。

でも，ネットで調べてみるとこうやって計算してる人も何人か見つかりましたし，もっとインチキくさいのもありました(^^;)

体調不良で頭がサエないので，計算間違いもあるかもね。なんかオカシイところを見つけたら教えてください m(__)m



■ 2007 年 7 月 30 日　T-NAKA さんのコメント

はじめまして，T_NAKA と申します。

電流素片 idz が半径 a の中心に来たときを z 軸の原点($z=0$)として、図の位置は「 $-z$ 」とすれば良いじゃないか？なんて思います。

そうすると，$-z=\dfrac{a}{\tan\theta}$ なので、$dz=\dfrac{a}{\sin^2\theta}d\theta$　となって，符号が逆になりません。

■ 2007 年 7 月 30 日　村田のコメント

T_NAKA さん，コメントありがとうございました。

「$-z=\dfrac{a}{\tan\theta}$ とすればよい」とのご指摘ですが，

$a>0$， $\tan\theta>0$ だから，これはちょっとマズいんじゃないかと思いましたが，翻って自分の式を見てみると θ が $\dfrac{\pi}{2}$ を超えたところから z が負になってしまいますから，やはり同じようにマズいですね(^^;)

その後，こんなページ↓を発見しました。

http://p-grp.nucleng.kyoto-u.ac.jp/~honda/electromagnetism/node33.html

図がないので分かりにくいですが，z 軸上の Q 点を O 点の上(正の側)にとって，idz と r' のなす角を θ' ($>\dfrac{\pi}{2}$)，その補角を θ として，補角 θ の方で積分しているようです。

■ 2007 年 7 月 31 日　T-NAKA さんのコメント

「物理学」（小出昭一郎著・裳華房）を引っ張り出して確認してみました。

また違う解釈になってますね。ご提示の図に沿って説明しますと，dz というベクトルの始点（点 O とします）からベクトル dH の始点（仮に点 Q とします）を結ぶ直線と z 軸の成す角が

θとします。

dz というベクトルの終点を点 P として，直線 OQ と直線 PQ の成す角を dθ にとります。

驚くべきことに，θの扇を開く方向には dθ をとらないということです。

そうすると，$r=\dfrac{a}{\sin\theta}$ ，$\sin\theta dz = rd\theta$ で z が陽には出て来ないようにしてます。

つまり、点 Q から距離 r にある $rd\theta$ の長さの $\dfrac{1}{\sin\theta}$ が dz という訳ですね。

■ 2007 年 7 月 31 日　村田のコメント

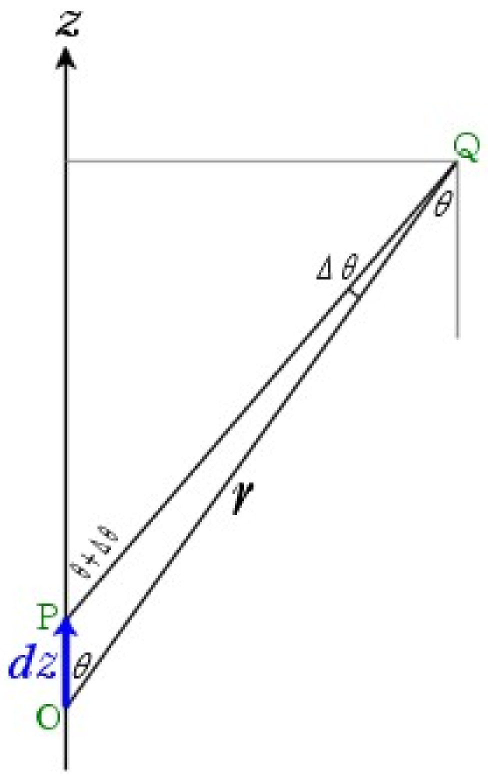
「物理学」（小出昭一郎 著）は学生の頃に買った憶えがあるので探してみたのですがどこにしまい込んだのか見つかりませんでした(^^;)

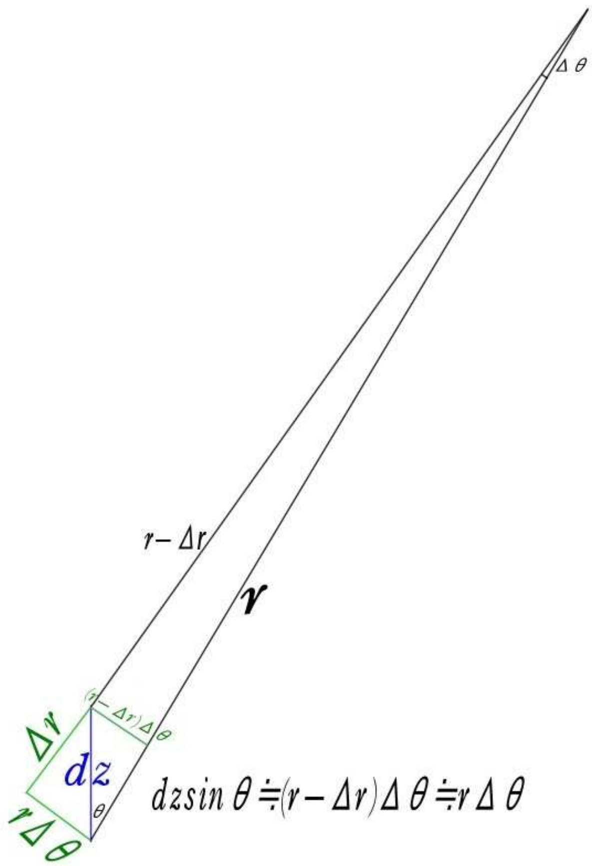
でも，こういうことですよね（右図）

で，大切な部分を拡大するとこう（下図）でしょうか。

確かにこうすれば困難は回避できそうです(^^)

近似式になるのがちょっと気になりますが，仕方のないことなのでしょうね。





これを読んでる人の中には

「 $\dfrac{1}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ を積分しろよ」と思ってる人もいるかもしれませんが，高校生向きの易しい説明を考えてるので，ご理解くださいね。

T_NAKA さん，いろいろと調べてくださって本当にありがとうございました。

勉強になりました m(__)m

murata@straycats.net